

分数概念语义理解对儿童乘法应用题表征的影响

张 皖^{1,4}, 辛自强², 陈英和³, 胡卫平⁴

(1. 山西师范大学 教育科学学院, 山西 临汾 041004; 2. 中央财经大学 社会与心理学院, 北京 100081;

3. 北京师范大学 发展心理研究所, 北京 100875; 4. 陕西师范大学 现代教学技术教育部重点实验室, 陕西 西安 710062)

摘要: 理解分数概念语义含义, 意味着能用分数符号表示不同问题情境中两个量的关系。而分数应用题表征的关键, 是将问题情境中事实关系正确转换为分数运算。二者关系尚缺乏实证研究加以检验。以 295 名小学六年级学生为被试, 考察了儿童分数概念语义理解对乘法应用题表征的影响。结果表明: (1) 儿童分数概念语义理解可以整体预测乘法应用题表征水平; (2) 儿童在部分整体含义和测量含义的理解水平, 均可单独预测其对计量、比较和转换乘法应用题表征水平; (3) 儿童对“比”的理解, 可单独预测比较应用题表征水平, 对“商”的理解, 可单独预期转换应用题表征水平, 同时, 算子含义不能单独预测任何应用题表征水平。这一结果说明, 儿童分数概念语义理解影响其表征应用题中的事实关系。

关键词: 分数概念; 语义理解; 分数应用题; 应用题表征

中图分类号: G620 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-9894 (2017) 04-0076-04

1 问题提出

对小学儿童来说, 分数乘法应用题是数学学习的难点, 而正确表征此类问题则是难中之难。研究表明, 儿童解决分数乘法应用题的常见错误表现为 3 方面: 不能理解题意, 难于选择正确的运算程序, 计算错误^[1]。其中前两项都与问题表征有关。已有应用题表征研究虽多, 但大都以整数应用题为材料, 从任务特征^[2-3]、表征策略^[4-5]、问题图式^[6]、一般认知能力和动机—人格特点等因素着手, 重在探讨应用题表征的一般心理机制。目前尚未有研究关注数学概念语义理解在应用题表征中的作用。

从数学概念语义理论和应用题解决的过程模型来看, 分数概念的语义理解水平, 可能是影响分数乘法应用题表征的重要因素。

数学是人类用以描述“事实关系”的一种语言, 而符号是构成语言的基本单位。因而与一般科学概念不同, 数学概念是一族符号, 这些符号指称了各种对象、操作或关系。这种符号与其对象之间的指称关系, 就称为该数学概念的语义含义^[7-8]。当人类掌握了这些语义含义, 作为符号的数学概念就会成为一种认知工具, 人类可以运用数学符号, 来表示特定的事实关系, 进而在心智层面上通过数学运算解决现实中的问题^[9]。

以分数概念为例, 与整数相比, 分数的意义要复杂得多。分数 a/b 是一个符号, 它可以指称不同情境中的两个量之间的等分、包含、对应、变换、相除等多种关系, 从而具有部分整体、测量、比、算子、商等多种含义, 理解这些含义, 则意味着儿童可以用分数符号表示特定问题情境中两个量的关系^[10]。具体来说, 商含义表示了数学运算中被除数与除数之间的除法运算关系, 部分—整体含义表示了分配问题情境中整体量与部分量之间的包含与补偿关系, 测量含义表示了测量情境中所测量与单位量之间的包含关系, 比含义表示了比例问题情境中两个量之间的比例关系, 而算子含义则表示了各种变换问题情境中输入量与输出量之间的

变换关系^[10]。同时, 作为一种携带语义含义的符号, 分数概念也是一种认知工具。儿童理解了这些含义, 他们就能够利用分数来处理分配、测量等问题情景中的变量关系^[9, 11]。

从应用题解决过程来看, 数学应用题往往用自然语言陈述, 以事实关系为题材, 并通过数学运算解决^[12]。而成功解决数学应用题的关键是正确表征问题中所包含的事实关系^[13-14]。这一表征过程包括了语义理解、逻辑建构和逻辑—数学类比 3 个环节^[15]。语义理解是将应用题文本转化为其所指称的现实问题情境的过程, 即解题者首先将文本语言转换为内在语言表征, 然后将这些内在语言表征整合在一起, 从而形成对现实问题的情景表征。逻辑建构是将实际问题情境转化为特定的逻辑结构, 例如包含关系、序列关系、比较关系等。而逻辑—数学类比则是将现实问题情境的内在逻辑关系转换为数学模型的过程。简而言之, 应用题表征就是一个“书面文本—问题情境—逻辑结构—数学模型”的转换过程。

在这一转换过程中, 同一类数学应用题可能具有多种问题情境。只有理解了这些问题情境, 才能建立恰当的数学模型。例如, 分数乘法应用题就具有计量、比较和转换 3 种具体问题情境^[13, 16]。所谓计量 (compute) 问题, 是指一个单位量与测度量相乘, 其中被乘数是单位量, 乘数是测度量, 积也是测度量。该问题表示将一个单位量反复累加。例如: 苹果的价格为每斤 $2/3$ 元, 如果甲农民现在有 90 斤苹果, 可以卖多少元? 其中, 每斤 $2/3$ 元是单位量, 而 90 斤是数量, 结果量是将每斤 $2/3$ 元反复累加 90 次后得到的。比较 (compare) 问题, 指一个测度量和倍数相乘, 其中被乘数是测度量, 乘数是倍数 (关系量), 积是测度量, 该问题表示两个测度量的倍数比较关系。例如, “甲农民原有苹果 90 斤, 如果卖掉了原来的 $2/3$, 问卖掉苹果多少斤”。 $2/3$ 表示卖掉和原来苹果数量的倍比关系。转换 (convert) 问题指两个单位量相乘, 乘积也为一个单位量。该问题表示单位的转换, 例如, “农民每天可收苹果 90 斤, 如果每斤苹果售价为 $2/3$ 元, 请问农民每天收入多少元”。该问题中, “斤/天”乘

收稿日期: 2017-03-10

基金项目: 国家社科基金重大项目——中国儿童青少年思维发展数据库建设及其发展模式的分析研究 (14ZDB160); 国家自然科学基金项目——分数概念的发展及其空间表征特点研究 (30970909); 山西师范大学教育科学基金项目——顶岗支教背景下师范生教师职业认同的发展研究 (YJ1311)

作者简介: 张皖 (1979—), 男, 山西阳泉人, 山西师范大学讲师, 陕西师范大学博士生, 主要从事认知发展与数学学习研究。

以“元/斤”，变换为“元/天”，可以看出，只有正确判断出分数 $2/3$ 是表示测度、单位还是倍比关系，才能识别出相应的问题情境，并建立正确的数学算式。

综上，分数概念的不同语义实质上代表了不同问题情境中两个量的具体关系，理解这些含义，意味着儿童可以用分数符号表示这些关系，而从应用题表征过程来看，成功表征分数应用题的关键，是建立分数运算模型和具体问题情境间的对应关系，因此可以预测，儿童对于分数特定含义的理解水平，可以预测他们对特定分数乘法应用题的表征能力。

然而，这一理论预期尚缺乏来自数学认知领域的研究证据，目前只有为数不多的研究关注了分数概念对应用题解决的影响，且未从语义理解的视角探讨这一问题。Hardiman 等人曾发现当分数是被乘数时，分数应用题并不比整数应用题更难，但是当分数是乘数时，分数应用题要显著难于整数应用题，他认为这与儿童对分数概念的理解有关^[16]。Hecht 发现儿童的概念性知识能很好地预测儿童的应用题解决成绩^[17]，并且在控制了工作记忆水平，简单算术运算知识以及阅读能力等变量之后，这种预测作用依然存在^[18]。但是他认为，概念性知识对于分数问题解决的影响是广泛性的，而并不针对于特定性质的问题，这可能是由于 Hecht 的分数概念测量任务仅仅包括了部分整体含义和测量含义，同时在结果分析中，Hecht 并没有考虑这两种不同分数概念语义含义间的差异，也没有区分不同情境的应用题任务，因此该研究尚不能说明，儿童理解分数概念的不同语义含义和解决不同语义情境应用题二者之间的关系。

因此，基于分数概念语义结构理论和应用题表征过程模型，探讨分数概念语义理解对不同情境分数乘法应用题表征的影响。

2 研究方法

2.1 被 试

从山西省 4 所普通小学中整班选取 6 年级儿童 315 名，其中有效被试 295 名，其中男生 150 名，女生 145 名，平均年龄 12 岁。这些学校采用人教版小学数学教材，在接受应用题测验前，所有儿童均已学习过分数乘法运算。

2.2 研究任务和材料

表 1 不同乘法应用题表征和分数概念语义理解及其相关

问题情境	$M \pm SD$	分数概念语义理解				
		部分—整体	测量	比	算子	商
		0.82±0.18	0.80±0.25	0.69±0.20	0.52±0.21	0.88±0.31
计量	0.83±0.29	0.25**	0.26**	0.12*	0.09	0.17*
比较	0.79±0.32	0.30**	0.35**	0.27**	0.25**	0.27**
转换	0.84±0.31	0.29**	0.37**	0.21**	0.11	0.34**

注：**在 0.01 水平（双侧）上显著相关；*在 0.05 水平（双侧）上显著相关

3.2 分数概念语义理解水平对分数乘法应用题表征的总体预测

以所有应用题得分总分为因变量，以分数概念测验总分为预测变量，回归分析结果表明，回归方程整体显著， $R^2=0.24$ ， $F(1, 293)=22.32$ ， $p<0.001$ ，回归系数 $\beta=0.21$ ，标准化回归系数 $\beta=0.49$ ， $t=9.60$ ， $p<0.001$ 。该结果说明，儿童分数概念语义理解可以整体预测其乘法应用题表征水平。

3.3 不同分数语义理解对不同类型分数乘法应用题表征的影响

以分数概念的 5 种语义理解水平为自变量，分别以 3 种不用语义性质任务的得分为因变量进行分层回归，由于不

采用张皖等编制的“分数概念语义理解测验”，该测验包括部分—整体、测量、算子、比、商 5 个维度，共 22 个项目，商包括 2 个项目，其余 4 个维度均各包括 5 个项目^[26]。项目均采用表征转换任务作为语义理解的测量指标，即当被试能用分数符号表示特定情境中两个量关系时，说明儿童理解了相应的语义含义，每个项目正确计 1 分，错误计 0 分。

自编分数乘法应用题测试任务^[13]，包括计量、比较、转换 3 种任务特征，每种特征包括 3 道题，一共 9 道分数乘法应用题，并在应用题设计时对以下 3 个因素进行了控制。第一，为了防止题目由易到难产生练习效应，将两步运算应用题放在单步运算应用题之前。第二，为保证儿童熟悉任务情境，防止事实性知识干扰，鉴于被试所在地区普遍种植苹果，因此采用苹果销售的任务情境。第三，为了防止题目对儿童采取某种运算产生暗示效应，题目中数字均为 90、60 和 $2/3$ ，这样即使算式不正确，运算结果也是整数。应用题测验依据列式及算理说明是否正确计分，如果列式正确且算理说明无误，则判定为正确表征，计 1 分，如列式错误或者算理说明错误，则判定为错误表征，计 0 分。

2.3 研究过程

于 2015 年 3 月底施测，采用随堂团体测验形式，要求学生两节课共 80 分钟内完成。由受过训练的心理学研究生担任主试，首先在第一节课发放“儿童分数概念理解测验”并在下课前收回，休息 10 分钟后，在第二节课发放分数乘法应用题测验，在应用题测试中，主试要求学生仔细思考后，先写出他是怎么想的（算理说明），再列出式子，而不用计算结果。共发放测验 315 份，共收回有效测验 297 份。从实际施测情况看，所有学生均可以在 80 分钟内完成测验。

3 研究结果

3.1 分数语义理解与应用题表征的相关

以被试在分数概念语义理解测验上各语义因子的得分率作为其分数概念理解水平指标，以被试在每类应用题上的表征正确率作为表征水平的指标，6 年级儿童对分数概念 5 种含义理解水平，对 3 类应用题表征水平，以及二者间相关系数见表 1。

同语义含义间可相互解释，为了消除共线性，从而分析某种语义理解对计量应用题表征的单独影响，将该语义理解水平放入回归方程第二层，而其它 4 种语义理解放入回归方程的第一层，从而估计出在控制其他 4 种含义的条件下，该种语义理解对特定性质应用题表征水平的单独解释率（*partial* R^2 ），一共得到 15 组分层回归方程，各方程 *partial* R^2 见表 2。

结果表明，（1）在控制其它 4 种语义理解的前提下，分数概念部分—整体和测量含义的语义理解水平，对计量、比较和转换应用题表征的单独解释率均显著；（2）分数“比”

含义理解水平,仅对比较应用题表征的单独解释率显著,而对计量和转换应用题的单独解释率不显著;(3)分数“商”含义理解水平,仅对转换应用题表征的单独解释率显著,而对计量和比较应用题的单独解释率不显著;(4)分数“算子”含义理解水平,对3类应用题表征的单独解释率均不显著.

表 2 分数概念语义理解对不同语义性质应用题的单独解释率

	部分—整体	测量	算子	比	商
计量	0.033**	0.021*	0.001	0.001	0.008
比较	0.019*	0.034**	0.005	0.014*	0.010
转换	0.029**	0.046**	0.007	0.004	0.040**

注: * $p < 0.05$; ** $p < 0.01$

4 讨 论

通过探讨儿童分数概念语义理解对于乘法应用题表征的影响.结果发现,当不考虑分数概念不同语义间差异时,分数概念理解在整体上可以预期乘法应用题表征水平,与这一结论不同的是,当考虑了分数概念不同语义含义间差异,和分数乘法应用题不同情境特征时,可以发现,儿童对部分整体含义和测量含义的理解水平可以预测各类型分数乘法应用题的表征,同时,“比”和“商”含义只能单独预测特定情境的乘法应用题,“算子”对乘法应用题表征没有单独预测作用.这些结果说明,儿童分数概念语义理解有助于其表征应用题中的事实关系.且这种影响既具有广泛性,也存在特异性.

上述研究结果不仅支持了 Hecht 的研究^[18],而且得到更为丰富的结论.首先,儿童分数概念语义理解可以预测儿童分数乘法应用题表征水平,这一结论支持了原有的研究预期,并与 Hecht 等的研究结果相一致. Hecht 等认为,分数的概念性知识,是理解分数数量“所指”(refer to)的知识,这种知识可以帮助儿童将分数概念和具体问题情境联系在一起,从而促进儿童对于分数应用题的表征^[17-18].

其次,在控制了其它语义理解的条件下,部分—整体含义和测量含义的理解水平可以广泛预测3类分数乘法应用题表征,而并不针对于特定性质的问题.这可能是由于,在5种分数语义含义中,这两种分数语义知识具有基础性地位.理解分数的部分—整体含义,意味着儿童能将分数 a/b 表示为“把整体等分为 b 份,选出其中 a 份”.以往研究表明,部分—整体含义是较为基础的分数概念理解方式.在许多语言中,分数一词都具有“分割”之意.例如英语中的fraction来自拉丁文“fangere”,意为“一个被分开的全体之各部分”.小学数学教材也会从部分—整体的角度解释分数的意义.更重要的是,部分—整体含义是小学儿童理解分数概念的基本方式,其它4种含义的理解是在理解部分—整体基础上建构而成^[11, 20].儿童在解决分数问题时,常常会将其他分数含义还原为部分—整体含义来理解,问题难度越大,这种还原的倾向就越明显^[21].

同部分—整体含义一样,儿童对分数测量含义理解也能

单独预测3类乘法应用题表征水平.理解分数测量含义,意味着儿童能将分数 a/b 表示为数字线上 a 个 $1/b$ 的长度,其关键是识别单位分数“ $1/b$ ”.Siegler等发现,数字线模型是儿童表征分数数量的心理模型^[22],而分数数量表征和分数运算和应用题表征能力都高度相关^[23-24].进一步可以发现,儿童在数字线上表征分数的能力对于儿童解决各类分数乘法应用题都具有促进作用.这可能是由于在表征各类分数乘法应用题中,儿童常以线段形式,对题目中的“份—总”关系进行图式表征,并在线段上确定“一份”(即测量含义中的单位1),而数字线表征和“单位1累加”恰恰是分数概念测量含义的核心,因此对于分数测量含义掌握较好的儿童,以数字线表征分数和确定“单位1”的能力较强,各类乘法应用题的表征水平也较高.

最后,在5个分数概念中,儿童对于“比”含义的理解可以预测他们在比较任务上的表现,这可能是由于分数概念的“比”含义表示两个量的相对大小,而比较任务则表示两个量的倍数关系,二者在语义含义上具有内在一致性.同时,儿童对“商”含义的理解可以预测儿童在转换任务上的表现.这可能是由于二者均与测度空间的变换有关,以往研究表明,儿童常用分数的“商”含义来理解两个不同的测度空间相“除”,如路程除以时间^[25],而转换应用题也表示不同测度空间的转换(即单位的变换).与其它4种含义不同,算子含义对所有应用题表征都没有单独的预测作用.实际教学中,学生很少理解分数概念的算子含义,教师也少有涉及^[26],同时也发现,儿童对分数概念算子含义的理解水平低于其它4种分数语义含义.因此儿童很少运用分数算子含义解决乘法应用题.

综上所述,儿童分数概念语义理解对乘法应用题表征具有显著的预测作用.因此,要达成“学以致用”的数学教学目标,克服分数应用题这一教学难点,帮助学生有效理解分数概念的语义含义就显得至关重要.分数概念是一个符号工具,其内容是关于分数符号“所指何物”的知识,是分数符号系统和不同情境中两个量的具体关系所组成的符号指称系统.儿童要很好的理解和使用这一工具,就不仅仅需要掌握分数符号体系本身(包括分数符号运算法则),更要理解和把握这一符号在现实世界中指称的多种语义含义.

5 结 论

第一,儿童分数概念语义理解可以影响儿童分数乘法应用题表征水平;第二,这种影响具有广泛性,部分—整体含义和测量含义的理解水平可以广泛预测3类分数乘法应用题表征,而并不针对于特定性质的问题.第三,这种影响也表现出特异性,儿童对“比”的理解,可单独预测比较应用题表征水平;对“商”的理解,可单独预期转换应用题表征水平;算子含义不能单独预测任何应用题表征水平.

[参 考 文 献]

- [1] Dong-Il K, Kim B, 고희정, et al. Analysis of Error Types in Fraction Word Problems According to Achievement Levels: Focusing on the 5th Grade Elementary Students [J]. *The Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, 2015, 15(5): 207-227.
- [2] Mattarella-Micke A, Beilock S L. Situating Math Word Problems: The Story Matters [J]. *Psychonomic Bulletin &*

- Review, 2010, 17(1): 106-111.
- [3] Xin Z. Fourth-Through Sixth-Grade Students' Representations of Area-of-Rectangle Problems: Influences of Relational Complexity and Cognitive Holding Power [J]. *The Journal of Psychology: Interdisciplinary and Applied*, 2008, 142(6): 581-600.
 - [4] 赖颖慧, 陈英和. 代数应用题视觉化表征的理论模型及影响因素[J]. 心理科学进展, 2010, (1): 75-83.
 - [5] 陈英和, 仲宁宁, 耿柳娜. 关于数学应用题心理表征策略的新理论[J]. 心理科学, 2004, (1): 246-247.
 - [6] 辛自强. 问题解决中图式与策略的关系: 来自表征复杂性模型的说明[J]. 心理科学, 2004, (6): 1344-1348.
 - [7] 王成营. 浅谈数学符号意义获得能力及其在问题解决中的培养[J]. 课程·教材·教法, 2012, (11): 74-78.
 - [8] Steinbring H. What Makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2006, 61(1): 133-162.
 - [9] Castro-Rodríguez E, Pitta-Pantazi D, Rico L, et al. Prospective Teachers' Understanding of the Multiplicative Part-Whole Relationship of Fraction [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2016, 92(1): 129-146.
 - [10] 辛自强, 张皖. 儿童的分数概念理解的结构及其测量[J]. 心理研究, 2012, (1): 13-20.
 - [11] Charalambous C Y, Pitta-Pantazi D. Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2007, 64(3): 293-316.
 - [12] 张梅玲, 周新林. 加减文字题解决研究概述[J]. 心理科学进展, 2003, (6): 642-650.
 - [13] 张皖, 辛自强, 陈英和, 等. 集合关系特征对小学生分数乘法应用题表征的影响[J]. 数学教育学报, 2016, 25(1): 43-46.
 - [14] 辛自强. 关系—表征复杂性模型的检验[J]. 心理学报, 2003, (4): 504-513.
 - [15] Kintsch W, Greeno J G. Understanding and Solving Word Arithmetic Problems [J]. *Psychological Review*, 1985, 92(1): 109-129.
 - [16] Hardiman P T, Mestre J P. Understanding Multiplicative Contexts Involving Fractions [J]. *Journal of Educational Psychology*, 1989, 81(4): 547-557.
 - [17] Hecht S A. Toward an Information-Processing Account of Individual Differences in Fraction Skills [J]. *Journal of Educational Psychology*, 1998, 90(3): 545-559.
 - [18] Hecht S A, Close L, Santisi M. Sources of Individual Differences in Fraction Skills [J]. *Journal of Experimental Child Psychology*, 2003, 86(4): 277-302.
 - [19] 张皖. 小学生分数概念理解及其在乘法应用题解决中的作用[D]. 北京师范大学, 2011.
 - [20] Pitkethly A, Hunting R. A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 1996, 30(1): 5-38.
 - [21] 张皖, 辛自强. 分数概念的个体建构——起点与机制及影响因素[J]. 数学教育学报, 2013, 22(1): 27-32.
 - [22] Schneider M, Siegler R S. Representations of the Magnitudes of Fractions [J]. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 2010, 36(5): 1227-1238.
 - [23] Siegler R S, Thompson C A, Schneider M. An Integrated Theory of Whole Number and Fractions Development [J]. *Cognitive Psychology*, 2011, 62(4): 273-296.
 - [24] Orrantia J, Munez D. Arithmetic Word Problem Solving: Evidence for a Magnitude-Based Mental Representation [J]. *Memory & Cognition*, 2013, 41(1): 98-108.
 - [25] Behr M J, Harel G, Post T R, et al. Rational Number, Ratio, and Proportion[A]. In: Grouws D. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* [C]. NY: Macmillan Publishing Company, 1992.
 - [26] Carraher D W. Lines of Thought: A Ratio and Operator Model of Rational Number [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 1993, 25(4): 281-305.

Influence of Semantic Understanding of Fractional Concept on Children' Multiplicative Word Problem Representation

ZHANG Huan^{1,4}, XIN Zi-qiang², CHEN Ying-he³, HU Wei-ping⁴

(1. School of Teacher Education, Shanxi Normal University, Shanxi Linfen 041004, China;

2. School of Sociology and Psychology, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China;

3. Institute of Developmental Psychology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

4. MOE Key Laboratory of Modern Teaching Technology, Shaanxi Normal University, Shaanxi Xi'an 710062, China)

Abstract: Fraction, an abstract symbol, had five different meanings in different contests, which might under the basis of children's difficulties in fraction problem representation. Based on a sample of 295 six graders. The study explored the contribution of children's semantic understanding of fractional concept in word problem representation. The data revealed that: (1) Children's performance on fraction problem representation could be predicted by their understanding of the semantic meaning of fraction, (2) students' understanding of part-whole and measure meaning of fraction was independent contribution to representation of all three kinds of fraction problems. (3) understanding of ratio meaning of fraction uniquely predicted representation of convert word problem, and understanding of quotient meaning could uniquely predict representation of compare word problem. Meanwhile, operator meaning could not uniquely predict representation of any kinds of word problem. The results indicated that the fractional semantic understanding was help for children to understanding the semantic relation in word problems.

Key words: fractional concept; understanding of semantic meaning; word problems involved fraction; representation of word problem

[责任编辑：周智智]